数理解析研究所講究録
第1755巻 2011年 9-16

堅非拡大型写像について
Firmly nonexpansive type mappings

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. 堅非拡大写像, 射影, 不動点, リゾルベント.

1 序論

本稿では, 文献 [5] で得られた結果を紹介する。文献 [5] では, 堅非拡大性 (firmly nonexpansiveness) をもつ3種類の写像に焦点をあて, それらの相互関係や連続性に関する性質の整理を行っている。

Hilbert 空間上の堅非拡大写像の Banach 空間への自然な拡張として, Bruck [11] による堅非拡大写像がある。例えば, Banach 空間上の増大作用素のリゾルベントは, Bruck [11] の意味で堅非拡大であることが知られている。しかし, Banach 空間の上の単調作用素のリゾルベントは, Bruck [11] の意味で堅非拡大とは限らない。本稿で取り上げる3種類の写像 (P 型, Q 型, R 型) は, 単調作用素のリゾルベントを例とする堅非拡大写像である。

2 準備

本稿では, E を実 Banach 空間, E^* を E の共役空間とし, E のノルムを $\|\cdot\|$ で, $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で, E 上の恒等写像を I で, E 上の双対写像を J で表す。また, E の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す。E のノルムの微分可能性および E の凸性の定義, J の諸性質につての詳細は, 文献 [32, 33] を参照するとよい。

C を E の部分集合とする。写像 $T\colon C \to E$ の不動点の集合を $F(T)$ で, 漸近的不動点 (asymptotic fixed point)[29] の集合を $\hat{F}(T)$ で表す。ここで, 点 $p \in C$ が写像 T の漸近的不動点であるとは, $x_n \rightharpoonup p$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ が成り立つ C の点列 $\{x_n\}$ が存在するときをいう。

以下, 特に断らない限り, E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間とする。

C を E の空でない閉凸集合とするとき, 各 $x \in E$ に対して, $\|x-z\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する。その点 z を $P_C x$ と表し, P_C は E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ばれる。

C を E の空でない閉凸集合とるとき, 各 $x \in E$ に対して, $\phi(z,x) = \min\{\phi(y,x) : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する*1。その点 z を $\Pi_C x$ と表し, Π_C は E から C の上への一般化射影 (generalized projection)*2 と呼ばれる。

C を $J(C)$ が E^* で閉凸となる E の部分集合とする。このとき, [22, Theorem 3.3] より, C は sunny generalized nonexpansive retract であり, E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction が存在する*3。

$A \subset E \times E^*$ を単調作用素*4, r を正の実数とする。このとき, 次の 1 価写像が定義できる。

- $K_r = (I + rJ^{-1}A)^{-1} \colon \operatorname{ran}(I + rJ^{-1}A) \to \operatorname{dom}(A)$;
- $L_r = (J + rA)^{-1}J \colon J^{-1}(\operatorname{ran}(J + rA)) \to \operatorname{dom}(A)$;
- $(I + rA^{-1}J)^{-1} \colon \operatorname{ran}(I + rA^{-1}J) \to J^{-1}\left(\operatorname{dom}(A^{-1})\right)$。

ここで, J^{-1} は E^* の双対写像である。これらの写像は, A のリゾルベントと呼ばれ, 単調作用素の零点の近似理論, 例えば近接点法*5において重要な役割を演ずる。K_r については [6,9,19,27,33] を, L_r については [2–4,7,8,16,18,20,21,23–26,28,29] を, M_r については [13,14,22] などを参照するとよい。

3 P 型, Q 型, R 型写像

本節では, 特に断らない限り, E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, C を E の空でない部分集合とする。

まず, P 型, Q 型, R 型写像の定義を述べる。

- 写像 $S \colon C \to E$ が P 型であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle Sx - Sy, J(x - Sx) - J(y - Sy) \rangle \geq 0$$

---

*1 ϕ は, $x, y \in E$ に対して $\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$ で定義される実数値関数である。

*2 一般化射影については, [1,18] を参照するとよい。

*3 詳しくは, [13,14] を参照するとよい。

*4 すべての $(x,x^*), (y,y^*) \in A$ に対して $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つ。

*5 [31] および [17,33] を参照するとよい。

が成り立つときをいう。

- 写像 $T\colon C \to E$ が Q 型であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle Tx - Ty, Jx - JTx - (Jy - JTy)\rangle \geq 0 \tag{3.1}$$

が成り立つときをいう[*6]。

- 写像 $U\colon C \to E$ が R 型であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle x - Ux - (y - Uy), JUx - JUy\rangle \geq 0 \tag{3.2}$$

が成り立つときをいう[*7]。

E が Hilbert 空間のとき J は恒等写像であるから, P 型, Q 型, R 型写像は, いずれも Hilbert 空間上の堅非拡大写像[*8]の一般化であることがわかる。さらに, 閉凸集合の上への距離射影は P 型であり, 閉凸集合の上への一般化射影は Q 型であり, sunny generalized nonexpansive retraction は R 型であることが知られている [5, Examples 3.1, 4.1, 5.1]。

単調作用素 $A \subset E \times E^*$ のリゾルベント $K_r = (I + rJ^{-1}A)^{-1}$ は P 型写像の代表例であるが, すべての P 型写像は, ある単調作用素のリゾルベントとして表せる。

命題 3.1 ([5, Proposition 3.3]). 写像 $S\colon C \to E$ に対して, $A_S \subset E \times E^*$ を $A_S = J\left(S^{-1} - I\right)$ で定義する。このとき, S が P 型であることと, A_S が単調であることは同値である。さらにこのとき, S は A_S のリゾルベント $K_1 = (I + J^{-1}A_S)^{-1}$ である。

P 型写像については次の結果が知られている。

命題 3.2 ([6]). $S\colon C \to E$ を P 型写像とするとき, 以下が成り立つ。

1. C が閉凸ならば, $F(S)$ も閉凸である。
2. $\hat{F}(S) = F(S)$ が成り立つ。
3. $\lambda \in [0, 1]$ ならば, $\lambda I + (1 - \lambda)S$ も P 型写像である。

単調作用素 $A \subset E \times E^*$ のリゾルベント $L_r = (J + rA)^{-1}J$ は Q 型写像の代表例であるが, すべての Q 型写像は, ある単調作用素のリゾルベントとして表せる。

---

*6 文献 [24] では, この写像を “firmly nonexpansive type” と呼んでいる。

*7 文献 [15] では, この写像を “firmly generalized nonexpansive type” と呼んでいる。

*8 C を実 Hilbert 空間 H の空でない部分集合とするとき, $V\colon C \to H$ が堅非拡大であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\langle x - Vx - (y - Vy), Vx - Vy\rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。

命題 3.3 ([25, Proposition 3.1]). 写像 $T\colon C \to E$ に対して, $A_T \subset E \times E^*$ を $A_T = JT^{-1} - J$ で定義する。このとき, T が Q 型であることと, A_T が単調であることは同値である。さらにこのとき, T は A_T のリゾルベント $L_1 = (J + A_T)^{-1}J$ である。

Q 型写像については次の結果が知られている。

命題 3.4 ([24, Lemma 5.1]). E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ狭義凸 Banach 空間, C を E の空でない部分集合, $T\colon C \to E$ を Q 型写像とする。このとき, $\hat{F}(T) = F(T)$ が成り立つ。特に, $F(T)$ が空でないとき, T は強擬非拡大*9である。

定理 3.5 ([24, Theorem 3.2]). C を E の閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を Q 型写像とする。このとき, $\{T^n x\}$ が有界となる $x \in C$ が存在することと, T の不動点が存在することは同値である。

単調作用素 $A \subset E^* \times E$ のリゾルベント $M_r = (I + rAJ)^{-1}$ が R 型写像の代表例であるが, すべての R 型写像は, ある単調作用素のリゾルベントとして表せる。

命題 3.6 ([5, Proposition 5.3]). 写像 $U\colon C \to E$ に対して, $A_U \subset E^* \times E$ を $A_U = \left(U^{-1} - I\right) J^{-1}$ で定義する。このとき, U が R 型であることと, A_U が単調であることは同値である。さらにこのとき, U は A_U のリゾルベント $M_1 = (I + A_U J)^{-1}$ である。

R 型写像については次の結果も得られる。

命題 3.7 ([5, Proposition 5.4]). R 型写像 $U\colon C \to E$ に対して, 以下が成り立つ。

1. C が閉凸ならば $U^{-1}0$ は閉凸である。
2. $\{x_n\}$ が C の点列で, $x_n \rightharpoonup p \in C$ かつ $Ux_n \to 0$ とする。このとき, $p \in U^{-1}0$ である。

4 P 型, Q 型, R 型写像の相互関係

V を Hilbert 空間上の堅非拡大写像とすると, $I - V$ も堅非拡大であり, V の不動点は $I - V$ の零点であることが容易にわかる。P 型, Q 型, R 型写像の間にもこれと似た関係がある。

*9 強擬非拡大写像 (strongly relatively nonexpansive mapping) については, [8, 23, 29] を参照するとよい。

以下、特に断らない限り, E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, C を E の空でない部分集合とする。

命題 4.1 ([5, Proposition 6.1]). P 型写像 $S\colon C \to E$ に対して, 写像 $T_*\colon J(C) \to E^*$, $U\colon C \to E$ を, それぞれ $T_* = J(I-S)J^{-1}$, $U = I - S$ で定義する。このとき, T_* は E^* で Q 型, U は R 型であり, $F(S) = (T_*J)^{-1}0 = U^{-1}0$, $S^{-1}0 = J^{-1}F(T_*) = F(U)$ が成り立つ。

命題 4.2 ([5, Proposition 6.2]). Q 型写像 $T\colon C \to E$ に対して, 写像 $S_*\colon J(C) \to E^*$, $U_*\colon J(C) \to E^*$ を, それぞれ $S_* = I_* - JTJ^{-1}$, $U_* = JTJ^{-1}$ で定義する。ここで, I_* は E^* 上の恒等写像である。このとき, S_* は E^* で P 型, U_* は E^* で R 型であり, $F(T) = (S_*J)^{-1}0 = J^{-1}F(U_*)$, $T^{-1}0 = J^{-1}F(S_*) = (U_*J)^{-1}0$ が成り立つ。

命題 4.3 ([5, Proposition 6.3]). R 型写像 $U\colon C \to E$ に対して, 写像 $S\colon C \to E$, $T_*\colon J(C) \to E^*$ を, それぞれ $S = I - U$, $T_* = JUJ^{-1}$ で定義する。このとき, S は P 型, T_* は E^* で Q 型であり, $F(U) = S^{-1}0 = J^{-1}F(T_*)$, $U^{-1}0 = F(S) = (T_*J)^{-1}0$ が成り立つ。

命題 3.4 および 4.3 より, 直ちに次の結果が得られる。

命題 4.4 ([5, Proposition 6.4]). E は滑らかかつ回帰的な Banach 空間で, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つとする。C を E の空でない部分集合, $U\colon C \to E$ を R 型の写像, $\{x_n\}$ を C の点列とする。このとき, $Jx_n \rightharpoonup u^* \in J(C)$ および $Jx_n - JUx_n \to 0$ ならば $J^{-1}u^* \in F(U)$ が成り立つ。

定理 3.5 および命題 4.3 より, 直ちに次の不動点定理が得られる。

定理 4.5 ([5, Theorem 6.5]). C を $J(C)$ が E^* で閉凸となる E の空でない部分集合, $U\colon C \to C$ を R 型写像とする。このとき, $\{U^n x\}$ が有界になる $x \in C$ が存在することと, U が不動点を持つことは同値である。

5 P 型, Q 型, R 型写像の連続性

本節では, 特に断らない限り, E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間とし, C を E の空でない部分集合とする。

次の定理は, R 型写像の連続性に関するものである。

定理 5.1 ([5, Theorem 7.1]). R 型写像 $U\colon C \to E$ に対して, 以下が成り立つ。

1. 有界集合の U による像は有界である。
2. $\{x_n\}$ を C の点列とし, $x_n \to x \in C$ とする。このとき, $Ux_n \rightharpoonup Ux$, $JUx_n \rightharpoonup JUx$ および $\|Ux_n\| \to \|Ux\|$ が成り立つ。
3. $JU\colon C \to E^*$ は単調かつデミ連続[*10]である。
4. E が Kadec–Klee 性を持つとき[*11], U は連続である。
5. E が一様凸のとき, U は C の有界集合上で一様連続である。
6. E が一様凸かつ一様に滑らかなとき, JU は C の有界集合上で一様連続である。

E 全体で定義された単調かつデミ連続な関数は極大単調である [9, Corollary 4.2] から, 定理 5.1 より次の系を得る。

系 5.2 ([5, Corollary 7.2]). $U\colon E \to E$ が R 型写像ならば JU は極大単調である。

P 型写像 $S\colon C \to E$ が与えられたとき, 命題 4.1 より $I - S$ は R 型であるから, 定理 5.1 より $J(I-S)$ は単調でデミ連続である。これと [32, Theorem 7.1.8] などを用いると次の不動点定理を得る。

定理 5.3 ([5, Theorem 7.4]). C を E の空でない有界な閉凸部分集合, P_C を E から C の上への距離射影, $S\colon C \to E$ を P 型写像とする。このとき, $F(P_C S)$ は空ではない。特に, $S(C) \subset C$ ならば, S は不動点をもつ。

また, 系 5.2 から次も得られる。

系 5.4 ([5, Corollary 7.5]). $S\colon E \to E$ が P 型ならば, $J(I-S)$ は極大単調である。

この系より, 次の定理が得られる。

定理 5.5 ([5, Theorem 7.6]). $S\colon E \to E$ を P 型写像, $r > 0$, $T = \bigl(J + rJ(I-S)\bigr)^{-1}J$ とする。このとき, T は E から E への Q 型 1 価写像であり, $F(S) = F(T)$ が成り立つ。

極大単調作用素 $A \subset E \times E^*$ のリゾルベント $K_1 = (I + J^{-1}A)^{-1}$ は E から E への P 型写像であるから, 定理 5.5 より $T = \bigl(J + J(I - K_1)\bigr)^{-1}J$ は, E から E への Q 型写像

[*10] 写像 $B\colon C \to E^*$ がデミ連続であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ に対して, $x_n \to x \Rightarrow Bx_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} Bx$ が成り立つときをいう [33]。

[*11] E の点列 $\{x_n\}$ に対して, $x_n \rightharpoonup x$ かつ $\|x_n\| \to \|x\|$ ならば $x_n \to x$ が成り立つとき。

で, $A^{-1}0 = F(K_1) = F(T)$ が成り立つことがわかる。

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

[3] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[4] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[5] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[6] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (2009), 1–17.

[7] ———, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, submitted.

[8] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[9] V. Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Translated from the second Romanian edition, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 10, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.

[10] F. E. Browder, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann. **175** (1968), 89–113.

[11] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[12] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for new resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Advances in mathematical economics. Vol. 10, Adv. Math. Econ., vol. 10, Springer, Tokyo, 2007, pp. 51–64.

[14] ———, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[15] ———, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 21–32.

[16] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[17] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[18] ———, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[19] K. Kido, *Strong convergence of resolvents of monotone operators in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 755–758.

[20] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[21] ———, *Proximal point algorithms with Bregman functions in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 505–523.

[22] ———, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[23] ———, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Stud. **14** (2007), 219–234.

[24] ———, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[25] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[26] ———, *Strongly convergent net given by a fixed point theorem for firmly nonexpansive type mappings*, Appl. Math. Comput. **202** (2008), 760–765.

[27] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.

[28] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[29] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[30] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[31] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[32] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publ., Yokohama, 2000.

[33] ———, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publ., Yokohama, 2000 (Japanese).